

## İNFÖRMATİKA

## ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА КВАДРАТУР

М.Н.ИМАНОВА, В.Р.ИБРАГИМОВ  
*Бакинский Государственный Университет*

*Одним из классических методов для численного решения интегральных уравнений является метод квадратур, который и в настоящее время успешно применяется к численному решению интегральных уравнений. Существуют разные классы методов для численного решения интегральных уравнений. Среди них можно отметить методы Рунге-Кутты, Адамса, двухсторонние и др. Однако, все эти методы применяются к численному решению интегральных уравнений совместно с методами квадратур. Здесь показаны основные недостатки методов квадратур и для численного решения нелинейного интегрального уравнения Вольтерра, предложен новый метод, который может быть назван обобщением метода квадратур. Результаты исследований иллюстрированы на шести конкретных примерах.*

**Введение.** Рассмотрим следующее нелинейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) = f(x) + \int_{x_0}^x K(x, s, y(s)) ds, \quad x \in [x_0, X]. \quad (1)$$

Предполагаем, что непрерывная по совокупности переменных функция  $K(x, s, y)$  определена в области  $G = \{x_0 \leq s \leq x \leq X, |y| \leq b\}$  и там же имеет непрерывные частные производные до некоторого порядка  $p+1$ , включительно. А непрерывная функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[x_0, X]$ , где имеет непрерывные производные до  $p+1$ . Для определения численного решения уравнения (1) разобьем отрезок  $[x_0, X]$  с точками  $x_i = x_0 + ih$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) на  $N$ -равных частей (постоянная величина  $h$  является шагом разбиений).

Здесь будет рассматриваться уравнение Вольтерра второго рода, ибо, как известно уравнение Вольтерра первого рода можно привести к интегральному уравнению Вольтерра второго рода [см.2, стр.115].

Обозначим через  $y(x_i)$  точное значение, а через  $y_i$  приближенное значение решения уравнения (1) в точках  $x_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ).

При применении метода квадратур к численному решению уравнения (1), интеграл заменяется следующей квадратурной формулой:

$$\int_{x_0}^{x_n} K(x_n, s, y(s)) ds = \sum_{i=0}^n A_i^{(n)} K(x_n, x_i, y(x_i)) + R_n, \quad (2)$$

где  $R_n$  - остаточный член, а  $A_i^{(n)}$  - коэффициенты квадратурной формулы. Зависимость коэффициентов квадратурной формулы от верхней границы интеграла затрудняет их применение и не улучшает точность численного метода. Поэтому, обычно, квадратурные формулы предлагают использовать в виде:

$$\int_{x_0}^{x_n} K(x_n, s, y(s)) ds \approx \sum_{i=0}^n A_i K(x_n, x_i, y_i). \quad (3)$$

Тогда для определения величины  $y_n$  можно предложить следующий метод:

$$y_n = f_n + \sum_{i=0}^n A_i K_{n,i}(y_i), \quad (4)$$

где

$$f_m = f(x_m), K_{m,i}(y_i) = K(x_m, x_i, y_i) \quad (m = 0, 1, \dots).$$

Формула для определения  $y_{n+1}$  по выше указанному методу будет иметь следующий вид:

$$y_{n+1} = f_{n+1} + \sum_{i=0}^{n+1} A_i K_{n+1,i}(y_i). \quad (5)$$

Как видно, при вычислении величины  $y_{n+1}$  интегральная сумма вычисляется заново и при этом уже известное значение  $y_n$  не учитывается. Для нахождения связи между этими значениями рассмотрим разность  $y_{n+1} - y_n$ . Тогда имеем:

$$y_{n+1} - y_n = f_{n+1} - f_n + \sum_{i=0}^n A_i (K_{n+1,i}(y_i) - K_{n,i}(y_i)) + A_{n+1} K_{n+1,n+1}(y_{n+1}). \quad (6)$$

Применяя теорему Лагранжа, имеем:

$$K_{n+1,i}(y_i) - K_{n,i}(y_i) = h K'_x(x_n + \xi_n h, x_i, y_i) = h K'_{n+\xi_n, i}(y_i),$$

где  $0 < \xi_n < 1$ . Тогда соотношение (6) можем переписать в виде:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} - f_n + h \sum_{i=0}^n A_i K'_x(x_n + \xi_n h, x_i, y_i) + A_{n+1} K_{n+1,n+1}(y_{n+1}). \quad (7)$$

Применяя формулу (3) к функциям  $K'_x(x_n + h \xi_n, s, y(s))$  получим:

$$\int_{x_0}^{x_n} K'_x(x_n + \xi_n h, s, y(s)) ds \approx \sum_{i=0}^n A_i K'_x(x_n + \xi_n h, x_i, y_i). \quad (8)$$

Из уравнения (1) можем написать:

$$y'(x) = f'(x) + K(x, x, y(x)) + \int_{x_0}^x K'_x(x, s, y(s)) ds. \quad (9)$$

Положим  $x = x_n + \xi_n h$ . Тогда из (9) следует:

$$y'(x_n + \xi_n h) = f'(x_n + \xi_n h) + K(x_n + \xi_n h, x_n + \xi_n h, y(x_n + \xi_n h)) + \int_{x_0}^{x_n + \xi_n h} K'_x(x_n + \xi_n h, s, y(s)) ds. \quad (10)$$

Легко можно понять, что

$$\int_{x_0}^{x_n + \xi_n h} K'_x(x_n + \xi_n h, s, y(s)) ds = \sum_{i=0}^n A_i K'_x(x_n + \xi_n h, x_i, y_i). \quad (11)$$

Отметим, что в соотношении (3) и (11) использована одна и та же квадратурная формула. Квадратурная формула, использованная в (3) относится к закрытым типам, а использованная в (11) относится к открытым типам. Поэтому точность этих квадратурных формул может иметь разные порядки по  $h$ .

Прежде чем учесть (11) в (10) на отрезке  $[x_{n-k+1}, x_{n+1}]$ , применим к функции  $K(x, s, y(s))$  интерполяционный многочлен Лагранжа, а к производным  $y'(x)$  и  $f'(x)$  разностные отношения, после чего полученное учитываем в (10). Тогда имеем:

$$\sum_{i=0}^k A_i K'_x(x_n + \xi_n h, x_i, y_i) = \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \bar{\alpha}_i y_{n+1-i} - \frac{1}{h} \sum_{i=0}^k \bar{\alpha}_i f_{n+1-i} - \sum_{i=0}^k \bar{\beta}_i K_{n+1-i},$$

где  $K_m = K(x_m, x_m, y_m)$ , а  $\bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) некоторые действительные числа.

Учитывая полученное в (7) и используя некоторые преобразования, получим:

$$y_{n+1} = y_n + f_{n+1} - f_n + \sum_{i=0}^k \bar{\alpha}_i y_{n+1-i} - \sum_{i=0}^k \bar{\alpha}_i f_{n+1-i} - h \sum_{i=0}^k \bar{\beta}_i K_{n+1-i} + h b_{n+1} K_{n+1}. \quad (12)$$

Здесь использована зависимость коэффициента  $A_{n+1}$  от  $h$ .

Метод (12) перепишем в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^k \alpha_i f_{n+i} + h \sum_{i=0}^k \beta_i K_{n+i}. \quad (13)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_i, \beta_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) определяются через  $\bar{\alpha}_i$  и  $\bar{\beta}_i$ .

Рассмотрим случай  $f(x) \equiv 0$ . Тогда из (13) получим:

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = h \sum_{i=0}^k \beta_i K_{n+i}. \quad (14)$$

Этот метод является известным  $k$ -шаговым методом с постоянными коэффициентами, примененным к численному решению следующей задачи:

$$y' = K(x, x, y), \quad y(x_0) = 0. \quad (15)$$

Решение задачи (15) не совпадает с решением уравнения (1).

Метод (14) напоминает нам обобщение метода Адамса. При  $\beta_k = 0$  из (14) следует явные, а при  $\beta_k \neq 0$  неявные многошаговые методы. Отметим, что метод (14) не совпадает с известными методами, которые использовались при вычислении численного решения уравнения (1) до настоящего времени. Нетрудно убедиться в том, что метод (14) является практичнее, чем известные квадратурные формулы, так как, в методе (14) количество вычислений функции  $K(x, y, z)$  постоянно на каждом шагу. Таким образом, получаем, что метод (13) является модификацией метода квадратур и имеет преимущество при применении к решению уравнения (1).

Рассмотрим построение многошагового метода, освобожденного от выше указанных недостатков.

Здесь для численного решения уравнения (1) предложено следующее обобщение метода (13)

$$\sum_{i=0}^k \alpha_i y_{n+i} = \sum_{i=0}^k \alpha_i f_{n+i} + h \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^k \beta_i^{(j)} K(x_{n+j}, x_{n+i}, y_{n+i}). \quad (16)$$

Для определения коэффициентов этого метода, можно использовать систему линейно-алгебраических уравнений, предложенную в [1].

Отметим, что в [2] имеется обширный список работ, посвященных исследованию интегральных уравнений, а в [3-15] работах освещены разные аспекты приближенных решений уравнения Вольтерра.

### §1. Применение метода (16) к некоторым конкретным уравнениям.

Здесь построены и применены некоторые методы типа (16), с помощью которых решены конкретные уравнения, и полученные результаты сравнивались с результатами квадратурных методов, имеющих разные точности. Все предложенные методы построены при  $k = 2$ .

**Пример 1.** Рассмотрим решение уравнения

$$y(x) = \int_0^x (x e^{s(x-2s)} + e^{-2s^2})(y(s) + 1 - s^2) ds, \quad (1.1)$$

точное решение которого равно  $y(x) = e^x + x - 1$ . Считая, что  $y_1$  известно, численное решение уравнения (1.1) находим по явным и неявным методам. Учитывая, что один из них явный, а другой неявный, используем их как формулы прогноза и коррекции. Это означает, что сперва вычисляем  $y_2$  по явным методам, а затем полученное значение уточняем по неявным методам. Таким образом, получаем следующий метод прогноза-коррекции:

$$\hat{y}_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n + f_{n+2} - 2f_{n+1} + f_n - h(K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_n, x_n, y_n))/2 + h(3K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) - K(x_{n+1}, x_n, y_n))/2, \quad (1.2)$$

$$y_{n+2} = y_n + f_{n+2} - f_n + h(-K(x_n, x_n, y_n) - K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) - K(x_n, x_{n+2}, \hat{y}_{n+2}) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) + 4K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+1}, x_{n+2}, \hat{y}_{n+2}) + K(x_{n+2}, x_n, y_n) + K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+2}, x_{n+2}, \hat{y}_{n+2}))/3. \quad (1.3)$$

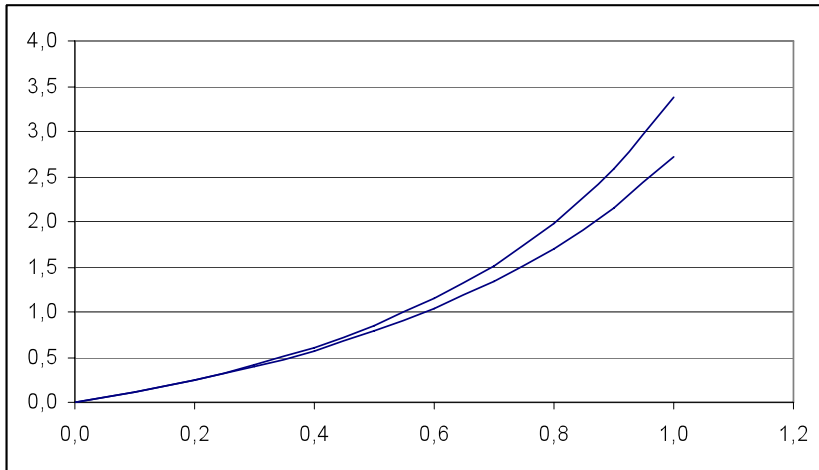
На первом шаге погрешности вычислений по методам (1.2) и (1.3) имеют следующий вид:

$$-0,00004999; -0,00000032.$$

Погрешности этих же методов на втором шаге равны:

$$0,00019972; -0,00005064.$$

Если для численного решения (1.1) используем метод (1.2), то погрешность на втором шаге будет 0,00004999, а на 10-ом шаге 0,65605865. Отметим, что эти результаты являются не хуже, чем полученные квадратурными методами (см.[2, стр.70]). По результатам вычислений, методом (1.2) построен следующий график приближенного решения:



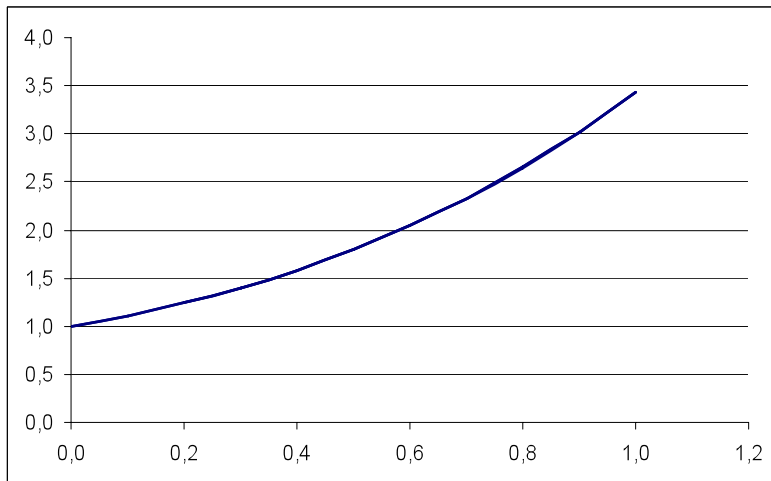
Увеличение погрешности шаг за шагом объясняется сложностью подынтегральной функции.

Рассмотрим следующий пример, в котором ядро интеграла имеет более простой вид, но сложность его решения

$$y(x) = 1 + x^2/2 + \int_0^x y(s) ds, \quad (\text{точное решение } y(x) = 2e^x - x - 1) \quad (1.1')$$

и сложность решения уравнения (1.1) почти совпадают. К решению данного примера применяем явный метод (1.2) и метод прогноза-коррекции (1.2)-(1.3). Затем формулу прогноза заменяем следующей:

$$\hat{y}_{n+2} = (y_{n+1} + y_n)/2 + f_{n+2} - (f_{n+1} + f_n)/2 + h(K(x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) - 3K(x_n, x_n, y_n) + 3K(x_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+1}, x_n, y_n) + 3K(x_{n+2}, x_{n+1}, y_{n+1}) + K(x_{n+2}, x_n, y_n))/4. \quad (1.2')$$



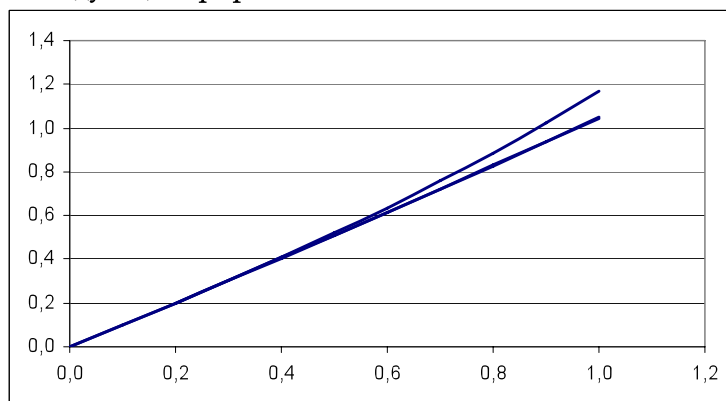
**Пример 2.** Рассмотрим решение уравнения

При нахождении численного решения использовали разные значения шага  $h$  ( $h = 0,1$ ;  $h = 0,05$  и  $h = 0,01$ ). Во всех случаях полученные результаты

были лучше, чем полученные в ([2, см.81]) по итерационным методам (во второй итерации погрешность в точке  $x=1$  с шагом  $h=0,1$  равна  $0,0755$ ). В этих случаях методы прогноза-коррекции давали лучшие результаты. Погрешность метода (1.2)-(1.3), в точке  $x=1$  равна  $0,34 \cdot 10^{-6}$  при шаге  $h=0,01$ , а погрешность метода (1.2) в той же точке равна  $0,1346 \cdot 10^{-3}$ . Как видно из следующего графика точные и приближенные значения почти не отличаются:

$$y(x) = x + \int_0^x \sin(x-s)y(s)ds, \quad x \in [0,1]. \quad (1.4)$$

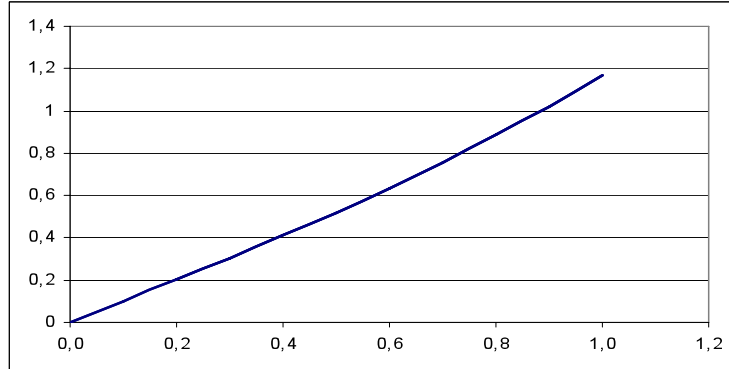
точное решение которого равно  $y = x + \frac{x^3}{6}$ . Уравнение (1.4) решаем по методам (1.2') при шаге  $h=0,05$ . На втором шаге погрешность метода равна  $\varepsilon_2 = 0,9375 \cdot 10^{-4}$ , а в конечной точке ( $x=1$ )  $\varepsilon_{20} = 0,1471869$ . Отметим, что задача (1.4) в [2, стр.87] решена методом трапеции с шагом  $h=0,05$  и погрешность в конечной точке  $\varepsilon_{20} = 0,255$ . Отметим, что методы (1.2') и методы трапеции имеют одинаковые точности, но метод (1.2') является явным, а метод трапеции неявным. Затем, для численного решения задачи (1.4) применяем соотношение (1.2') и (1.3) как метод прогноза-коррекции. На втором шаге погрешности методов прогноза и коррекции равны  $\varepsilon_2 = 0,9375 \cdot 10^{-4}$ ;  $\varepsilon = 0,18 \cdot 10^{-6}$ , но в конечной точке (при  $x=1$ ) равны  $\varepsilon_{20} = 0,14282473$ ;  $\varepsilon_{20} = 0,14215405$ , соответственно. Если в качестве метода прогноза используем метод (1.2), то на втором шаге погрешность метода (1.3) равна нулю. Такой результат ожидаемый, поскольку точность метода (1.3) равна  $p=4$  и решение интегрального уравнения является многочленом третьего степени. Однако, на следующем шаге погрешность равна  $\varepsilon_3 = 0,12464 \cdot 10^{-3}$ . Результаты вычислений по методам (1.2) размещены в следующем графике:



Такой рост погрешности объясняется характером подынтегральной функции. Действительно, если рассмотрим следующий пример

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + \int_0^x \left( \frac{s^3}{6} + s + 1 - y(s) \right) ds, \quad (1.4')$$

решение которого также равно  $x^3/6 + x$ , то в результате применений к его решению вышеприведенных методов, полученные погрешности равны нулю, т.е.  $\varepsilon_j = 0$  ( $j = 2, 3, \dots, 20$ ). Вычисления проводились с точностью  $10^{-8}$ . Результаты вычислений по вышеуказанным методам размещены в следующем графике:



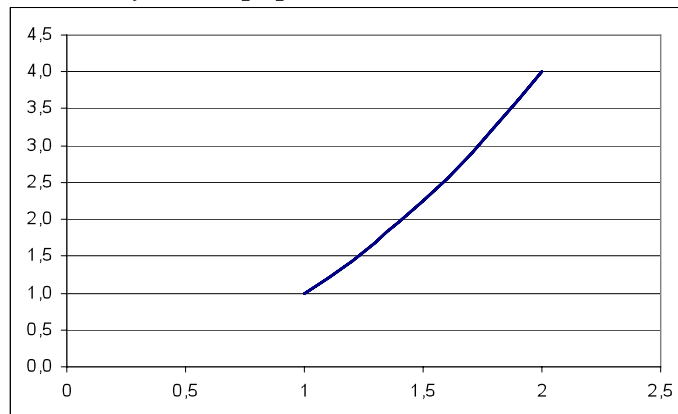
Отметим, что если мы применим метод (1.2) к численному решению интегральных уравнений, решение которых является многочленом со степенью не больше, чем 2 (два), то можно ожидать, что погрешность метода (1.2) будет равняться нулю. С этой целью рассмотрим следующий пример.

**Пример 3.** Точное решение уравнения

$$y(x) = 1 + 2 \int_1^x \sqrt{y(s)} ds, \quad x \in [1, 2], \quad (1.5)$$

равно  $y(x) = x^2$ .

Этот пример решали выше полученными методами и погрешность для всех методов равнялась нулю. Результаты вычислений по вышеприведенным методам размещены в следующем графике:

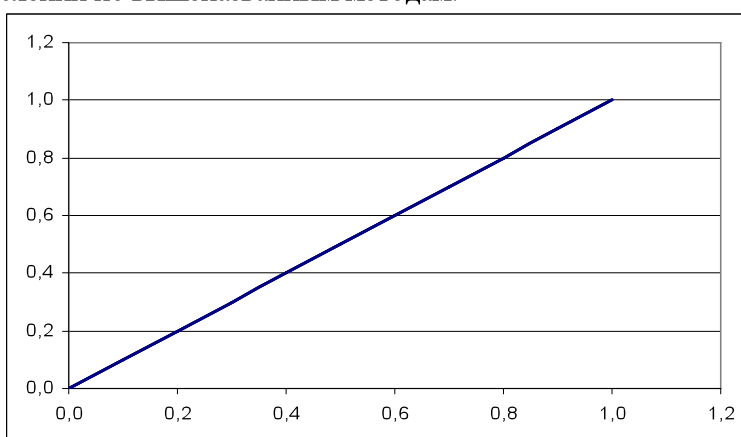


Однако пример (1.5) решен в [2, стр.83] итерационными методами, погрешность для которых на конечном шаге равна 0,1802. Для проверки выше полученных результатов рассмотрим решение следующего примера, решение которого равно  $y(x) = x$ .

**Пример 4.** Рассмотрим численное решение интегрального уравнения

$$y(x) = \int_0^x \frac{1 + y^2(s)}{1 + s^2} ds, \quad x \in [0,1]. \quad (1.6)$$

Этот пример в [2, стр.74] решен итерационными методами, а здесь с шагом  $h = 0,05$  решен выше построенными методами, в результате которых погрешности во всех случаях равнялись нулю. В следующем графике даны результаты вычислений по выше названным методам:



#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ibrahimov V.R., Imanova M.N. On a new method of solution to Volterra integral equation. Transactions issue mathematics and mechanics series of physical technical and mathematical science, XXVII, 2007, №1, p. 197-204.
2. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Науково Думка, 1986, 542 с.
3. Ибрагимов В.Р., Мехтиева Г.Ю. Об одном обобщении методов квадратур. Вестник Бакинского Государственного Университета, сер. физ.-мат. наук, 2008, №1, с.92-98.
4. Zima P., Diogo T. Numerical solution of a no uniquely solvable Volterra integral equation using extrapolation methods, I.Comput.Appl.Math.140 2002, №140, p. 537-557.
5. Ломакович А.М., Василенко А.П. Решение интегральных уравнений типа Вольтерра методом вида Рунге-Кутты. Дифференц. уравнения, 1968, 4, №11, с.2094-2102.
6. Baker С.Т.Н. The numerical treatment of integral equations.Oxford, Claerdon, 1977, 1034p.
7. Brunner H. The Solution of Volterra integral equations of the first kind by piecewise polynomials. J.Inst.Math. and Appl., 1973,12,№3, p.295-302.
8. Holyhead P. A. W., Mc Kee S., Taylor P.J. Multistep methods for solving linear Volterra integral equations of the first kind. SIAM J. Numer. Anal., 1975, №5,p.698-711.
9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. – 2-е изд. Москва: Наука, 1976, 216с.
10. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: Т.1, Москва: Наука, 1966, 632 с.

11. Baker C. T. H., Keech M. S. Stability regions in the numerical treatment of the Volterra integral equations. SIAM J. Numer. Anal., 1978, 15, №2, p.394-417.
12. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. Москва: Наука, 1966, 372 с.
13. Никольский С.М. Квадратурные формулы. Москва: Наука, 1979, 256 с.
14. Malina L. A stable methods of high order for Volterra integral equations. Appl. Math., 1975, 20, №5, p.336-344.
15. Ch.Lubich. Runge-Kutta theory for Volterra and Abel Integral equations of the second kind. Mathematics of computation, 41, 163, 1983, p. 87-102.
16. Булатов М.В., Чистяков Е.В. Численное решение интегро-дифференциальных систем с вырожденной матрицей перед производной многошаговыми методами. Дифференц. уравнения, 2006, 42, №9, с. 1248-1255.

## ÜMUMİLƏŞMİŞ KVADRATUR ÜSULUNUN BİR TƏTBİQİ HAQQINDA

M.M.İMANOVA, V.R.İBRAHİMOV

### XÜLASƏ

İnteqral tənliklərin ədədi həlli üçün klassik üsullardan biri olan kvadratur üsulu, hazırda müvəffəqiyyətlə inteqral tənliklərin ədədi həllinə tətbiq olunur. İnteqral tənliklərin ədədi həlli üçün müxtəlif üsullar sinfi mövcuddur. Bunlardan Runge-Kutta, Adams, ikitərəfli və digər üsullarını qeyd etmək olar. Bu üsulların hamısı inteqral tənliklərin ədədi həllinə kvadratur üsul ilə birlikdə tətbiq olunurlar. Burada kvadratur üsulun bir nöqsanı qeyd olunmuş və bu nöqsanın aradan qaldırılması üçün kvadratur üsulun ümumiləşməsi olan yeni bir üsul qurulmuş və o, qeyri-xətti Volterr tənliyinin ədədi həllinə tətbiq edilmişdir. Tədqiqatın çatışmazlığı göstərilmiş və bu çatışmazlığın aradan qaldırılması üçün yeni üsul və qeyri-xətti Volterr tənliyinin ədədi həlli üçün istifadəsi təklif edilmişdir. Tədqiqatın nəticəsi altı misal üzərində nümayiş olunmuşdur.

## AN APPLICATION OF GENERALIZATION FORM OF QUADRATURE METHOD

M.N.IMANOVA, V.R.IBRAHIMOV

### SUMMARY

One of classical methods for the numerical solving of the integral equations is the quadratures method which and at present time is successfully applied to the numerical solving of the integral equations. There are different classes of methods for the numerical solving of the integral equations. Among them it is possible to note methods of Runge-Kutta, Adams, two-sidedly and etc. However, all these methods are applied to the numerical solving of the integral equations together with quadratures methods. Here the basic lacks of quadratures methods are shown and for the numerical solving of the nonlinear Volterra integral equation, the new method which can be named by generalization is suggested. Results of researches are illustrated by six concrete examples.